OM

CIRKELDELNINGSEKVATIONEN

AKADEMISK AFHANDLING

AF

HARALD WALLIN

UPPSALA 1901
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

11555.

OM

CIRKELDELNINGSEKVATIONEN

AKADEMISK AFHANDLING

SOM MED TILLSTÅND AF

VIDTBERÖMDA FILOSOFISKA FAKULTETENS I UPSALA

MATEMATISKT-NATURVETENSKAPLIGA SEKTION

FÖR VINNANDE AF FILOSOFIE DOKTORSGRAD

TILL OFFENTLIG GRANSKNING FRAMSTÄLLES

Å LÄROSALEN N:o XI

LÖRDAGEN DEN 2 FEBRUARI 1901 KL. 10 F. M.

AF

HARALD WALLIN

FILOSOFIE LICENTIAT AF GOTLANDS NATION

ACAD.
LUGD. BAT.
BIBL.

UPPSALA 1901

ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548928_0101

Vid författandet af föreliggande afhandling har jag hufvudsakligen begagnat följande arbeten:

Gauss, Untersuchungen über höhere Arithmetik. Deutsch herausgegeben von H. Maser (1889),

Bachmann, Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie (1872),

Weber, Lehrbuch der Algebra, Zweite Auflage, erster Band (1898),

hvilka arbeten vid citat af nämnda författare åsyftas.

§ 1. Allmän metod.

Uppgiften att dela en cirkelperiferi i p stycken lika stora delar, där p är ett primtal större än två, kan som bekant reduceras till den fullständiga algebraiska lösningen af ekvationen

$$x^p - 1 = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

hvars primitiva rötter sammanfalla med rötterna till ekvationen

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

Denna ekvation kallas *cirkeldelningsekvationen,* emedan läran om cirkelperiferiens delning väsentligen beror på lösningen af densamma.

Cirkeldelningsekvationen är irreduktibel *.

Lätt inser man riktigheten af satsen: *Om x_1 är en rot hviken som hälst till ekvationen $x^p - 1 = 0$, så är hvarje dignitet af x_1 äfven rot till denna ekvation.*

---

* Bevis härför äro gifna af GAUSS, Untersuchungen . . . etc., Art. 341; KRONECKER, Beweis dass für jede Primzahl p die Gleichung $1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1} = 0$ irreductibel ist (Crelles Journal Band 29); DEDEKIND, Beweis für die Irreductibilität der Kreistheilungs-Gleichungen (Crelles Journal Band 54); ARNDT, Einfacher Beweis für die Irreductibilität einer Gleichung in der Kreistheilung (Crelles Journal Band 56); m. fl.

Om r är en *primitiv* rot till (1), äro således

$$r,\ r^2,\ r^3,\ \ldots\ r^{p-1},\ r^p,\ r^{p+1},\ r^{p+2},\ \ldots$$

alla rötter till (1). Eftersom de äro oändligt många, måste flera af dem vara lika. Vi få nämligen

$$r^{p+1} = r^p \,.\, r \ = r$$
$$r^{p+2} = r^p \,.\, r^2 = r^2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

d. v. s. alla rötter från och med r^{p+1} äro lika med någon af rötterna

$$r,\ r^2,\ r^3,\ \ldots\ r^p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

Om

$$r^s = r^t, \text{ där } 1 \leqq s < t \leqq p,$$

så skulle

$$r^{t-s} = 1, \text{ där } 0 < t - s < p,$$

ty s och t respektive äro något af talen $1, 2, 3, \ldots p$. Villkoren kunna äfven skrifvas

$$1 \leqq t - s \leqq p - 1.$$

Alltså skulle r satisfiera ekvationen

$$x^{t-s} = 1,$$

d. v. s. r skulle satisfiera en ekvation, hvars gradtal är mindre än p, men detta är omöjligt, ty r antogs vara en *primitiv* rot till $x^p - 1 = 0$. Alltså kan

$$r^s \textit{ ej} \text{ vara lika med } r^t.$$

Häraf synes, att rötterna (A) alla äro olika.

Som nu ekvationen (2) har gemensamma rötter med ekvationen (1) med undantag af den rot, som är lika med enheten (r^p), så få vi enligt föregående följande sats:

Betecknar r en rot hvilken som hälst till ekvationen

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = 0, \quad \ldots \quad (2)$$

så kunna samtliga rötter till denna ekvation framställas genom

$$r,\ r^2,\ r^3, \ldots r^{p-1} \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

Som nu

$$r^a = r^b, \text{ om } a \equiv b, \text{ mod. } p\,^*,$$

och potenserna

$$1,\ g,\ g^2, \ldots g^{p-2},$$

där g är en primitiv rot till primtalet p, äro, om ock i en annan ordning, kongruenta, mod. p med talen

$$1,\ 2,\ 3, \ldots p-1,$$

så kunna potenserna (B) frånsedt ordningsföljden ersättas med

$$r,\ r^g,\ r^{g^2}, \ldots r^{g^{p-2}} \ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

Om vi sätta

$$p - 1 = e \,.\, f,$$

så kunna vi efter Gauss** gruppera rötterna (C) till ekvationen (2) i e perioder med f termer i hvarje period på följande sätt:

$$\left.\begin{array}{lllll}
\eta_0 & = r & + r^{g^e} & + \cdots + & r^{g^{(f-1)e}} \\
\eta_1 & = r^g & + r^{g^{e+1}} & + \cdots + & r^{g^{(f-1)e+1}} \\
\eta_2 & = r^{g^2} & + r^{g^{e+2}} & + \cdots + & r^{g^{(f-1)e+2}} \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\eta_{e-1} & = r^{g^{e-1}} & + r^{g^{2e-1}} & + \cdots + & r^{g^{fe-1}}
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (I)$$

---

* Om nämligen $a \equiv b$, mod. p, så är $a - b = mp$ (m helt tal) eller $a = b + mp$.

Men $\quad r^{b+mp} = r^b \,.\, r^{mp} = r^b,$

alltså $\quad r^a = r^b.$

** Gauss, Untersuchungen ... etc., Art. 343.

Perioderna $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_{e-1}$ äro tydligen rötter till ekvationen

$$\eta^e + a_1\eta^{e-1} + a_2\eta^{e-2} + \cdots + a_{e-1}\eta + a_e = 0, \quad . \quad (3)$$

i hvilken koefficienterna $a_1, a_2, \ldots a_e$ äro hela, heltaliga och symmetriska funktioner af perioderna och alltså hela tal*. Vi skola i det följande skaffa oss uttryck på koefficienterna i ekvationen (3).

Enligt (I) kunna vi skrifva

$$\eta_0 = \sum_{s=0}^{s=f-1} r^{g^{se}} \text{ och } \eta_k = \sum_{t=0}^{t=f-1} r^{g^{te+k}},$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots e-1)$$

hvaraf vi få

$$\eta_0\eta_k = \sum_{s=0}^{s=f-1}\sum_{t=0}^{t=f-1} r^{g^{se}+g^{te+k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Vid bildandet af summan i (4) få vi för ett bestämdt s ersätta t med $t + s$, eftersom t och $t + s$ samtidigt genomlöpa ett fullständigt restsystem, mod. f. Ekvationen (4) kan alltså skrifvas

$$\eta_0\eta_k = \sum_{s=0}^{s=f-1}\sum_{t=0}^{t=f-1} r^{g^{es}(1+g^{et+k})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Om vi nu först utföra summeringen med afseende på s, så blir för ett bestämdt t antingen

$$1 + g^{et+k} \equiv 0, \text{ mod. } p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

eller

$$1 + g^{et+k} \equiv g^{ez+h}, \text{ mod. } p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

där h och z genomlöpa fullständiga restsystem mod. e och mod. f respektive.

---

* Jämför BACHMANN, sid. 50.

I förra fallet (6) blir

$$\sum_{s=0}^{s=f-1} r^{esmp} = f. \qquad (m \text{ helt tal})$$

I senare fallet (7) blir

$$\sum_{s=0}^{s=f-1} r^{g^{e(s+z)+h}} = \eta_h.$$

Ekvationen (4) kunna vi nu efter KUMMERS* föredöme skrifva

$$\eta_0 \eta_k = \mu_k f + m_{0,k}\eta_0 + m_{1,k}\eta_1 + \cdots + m_{e-1,k}\eta_{e-1}, \quad (8)$$

där koefficienten $\mu_k = 1$, om f är jämn och $k = 0$ samt om f är udda och $k = \frac{e}{2}$; i alla andra fall är $\mu_k = 0$. Koefficienterna $m_{h,k}$ äro tydligen hela tal, som för hvarje särskildt fall kunna bestämmas.

För beräkningen af koefficienterna i (3) måste vi nu skilja mellan två olika fall. I första fallet antaga vi, att f är jämn, i andra fallet att f är udda.

1) f är jämn.

Ur (8) få vi

$$\left.\begin{aligned}
\eta_0^2 &= f + m_{0,0}\eta_0 + m_{1,0}\eta_1 + m_{2,0}\eta_2 + \cdots + m_{e-1,0}\eta_{e-1} \\
\eta_0\eta_1 &= m_{0,1}\eta_0 + m_{1,1}\eta_1 + m_{2,1}\eta_2 + \cdots + m_{e-1,1}\eta_{e-1} \\
\eta_0\eta_2 &= m_{0,2}\eta_0 + m_{1,2}\eta_1 + m_{2,2}\eta_2 + \cdots + m_{e-1,2}\eta_{e-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\eta_0\eta_{e-1} &= m_{0,e-1}\eta_0 + m_{1,e-1}\eta_1 + m_{2,e-1}\eta_2 + \cdots + m_{e-1,e-1}\eta_{e-1}
\end{aligned}\right\} \quad (II)$$

* KUMMER, Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihre Primfactoren (Crelles Journal Band 35). Jämför BACHMANN, Fünfzehnte Vorlesung.

Om vi multiplicera båda leden i första ekvationen i (II) med η_0, få vi

$$\eta_0^3 = f\eta_0 + m_{0,0}\eta_0^2 + m_{1,0}\eta_0\eta_1 + m_{2,0}\eta_0\eta_2 + \cdots + m_{e-1,0}\eta_0\eta_{e-1} \quad (9)$$

Efter insättning af värdena på η_0^2, $\eta_0\eta_1$, $\eta_0\eta_2$, ... i (9) och reduktion få vi

$$\eta_0^3 = f\eta_0 + fm_{0,0} + m_{0,0}^{(1)}\eta_0 + m_{1,0}^{(1)}\eta_1 + m_{2,0}^{(1)}\eta_2 + \cdots + m_{e-1,0}^{(1)}\eta_{e-1} \quad (10)$$

$m_{0,0}^{(1)}$, $m_{1,0}^{(1)}$, ... betyda hela tal, hvilkas värden sedan skola angifvas.

På motsvarande sätt få vi

$$\eta_0^4 = f\eta_0^2 + fm_{0,0}\eta_0 + fm_{0,0}^{(1)} + m_{0,0}^{(2)}\eta_0 + m_{1,0}^{(2)}\eta_1 + m_{2,0}^{(2)}\eta_2 + \cdots + m_{e-1,0}^{(2)}\eta_{e-1} \quad (11)$$

$$\eta_0^5 = f\eta_0^3 + fm_{0,0}\eta_0^2 + fm_{0,0}^{(1)}\eta_0 + fm_{0,0}^{(2)} + m_{0,0}^{(3)}\eta_0 + m_{1,0}^{(3)}\eta_1 + m_{2,0}^{(3)}\eta_2 + \cdots + m_{e-1,0}^{(3)}\eta_{e-1} \quad (12)$$

o. s. v.

Med tillhjälp af dessa uttryck skola vi nu härleda några intressanta relationer. Först anföra vi den kända relationen

$$\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_{e-1} = -1 \quad (13)$$

Om vi sedan i första ekvationen i (II) efter hvartannat sätta r^g, r^{g^2}, ... $r^{g^{e-1}}$ i stället för r, hvarigenom perioderna η_0, η_1, ... η_{e-1} komma att cykliskt förflyttas respektive 1, 2, ... $e-1$ steg, få vi

$$\eta_1^2 = f + m_{0,0}\eta_1 + m_{1,0}\eta_2 + m_{2,0}\eta_3 + \cdots + m_{e-1,0}\eta_0,$$
$$\eta_2^2 = f + m_{0,0}\eta_2 + m_{1,0}\eta_3 + m_{2,0}\eta_4 + \cdots + m_{e-1,0}\eta_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

På motsvarande sätt kunna vi ur (10) härleda

$$\eta_1^3 = f\eta_1 + fm_{0,0} + m_{0,0}^{(1)}\eta_1 + m_{1,0}^{(1)}\eta_2 + \cdots + m_{e-1,0}^{(1)}\eta_0,$$
$$\eta_2^3 = f\eta_2 + fm_{0,0} + m_{0,0}^{(1)}\eta_2 + m_{1,0}^{(1)}\eta_3 + \cdots + m_{e-1,0}^{(1)}\eta_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

o. s. v.

Häraf få vi

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma\eta_k = -1\\
&\Sigma\eta_k^2 = ef - \Sigma m_{k,0}\\
&\Sigma\eta_k^3 = -f + efm_{0,0} - \Sigma m_{k,0}^{(1)}\\
&\Sigma\eta_k^4 = f\Sigma\eta_k^2 - fm_{0,0} + efm_{0,0}^{(1)} - \Sigma m_{k,0}^{(2)}\\
&\Sigma\eta_k^5 = f\Sigma\eta_k^3 + fm_{0,0}\Sigma\eta_k^2 + fm_{0,0}^{(1)}\Sigma\eta_k + efm_{0,0}^{(2)} - \Sigma m_{k,0}^{(3)}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

Vid utförandet af summorna skall k genomlöpa ett fullständigt restsystem, mod. e.

Om vi begagna oss af några allmänna egenskaper hos koefficienterna $m_{h,k}$, kunna ekvationerna i (III) förenklas.

Vi hafva*

$$f = \mu_k + m_{0,k} + m_{1,k} + \cdots + m_{e-1,k}; \quad \ldots \quad (14)$$

alltså, om f är jämn och $k = 0$,

$$f = 1 + m_{0,0} + m_{1,0} + \cdots + m_{e-1,k}$$

eller

$$\sum_{k=0}^{k=e-1} m_{k,0} = f - 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Af (9) och (10) få vi

$$\left.\begin{aligned}
&m_{0,0}^{(1)} = m_{0,0}\cdot m_{0,0} + m_{1,0}\cdot m_{0,1} + m_{2,0}\cdot m_{0,2} + \cdots\\
&m_{1,0}^{(1)} = m_{0,0}\cdot m_{1,0} + m_{1,0}\cdot m_{1,1} + m_{2,0}\cdot m_{1,2} + \cdots\\
&m_{2,0}^{(1)} = m_{0,0}\cdot m_{2,0} + m_{1,0}\cdot m_{2,1} + m_{2,0}\cdot m_{2,2} + \cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad \text{(IV)}$$

hvaraf

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{k=e-1} m_{k,0}^{(1)} &= m_{0,0}\cdot\Sigma m_{k,0} + m_{1,0}\cdot\Sigma m_{k,1} + m_{2,0}\cdot\Sigma m_{k,2} + \cdots =\\
&= m_{0,0}(f-1) + m_{1,0}f + m_{2,0}f + \cdots =\\
&= f\Sigma m_{k,0} - m_{0,0} =\\
&= f(f-1) - m_{0,0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)
\end{aligned}$$

* Kummer, Über die Zerlegung ... etc., ekvationen (3).

På samma sätt få vi

$$\sum_{k=0}^{k=e-1} m_{k,0}^{(2)} = f\Sigma m_{k,0}^{(1)} - m_{0,0}^{(1)} = \\ = f^2(f-1) - f m_{0,0} - m_{0,0}^{(1)} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

$$\sum_{k=0}^{k=e-1} m_{k,0}^{(3)} = f\Sigma m_{k,0}^{(2)} - m_{0,0}^{(2)} = \\ = f^3(f-1) - f^2 m_{0,0} - f m_{0,0}^{(1)} - m_{0,0}^{(2)} \quad \ldots \quad (18)$$

o. s. v.

Genom insättning af (15), (16), (17), (18), o. s. v. i systemet (III) få vi

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\eta_k &= -1 \\ \Sigma\eta_k^2 &= -f + p \\ \Sigma\eta_k^3 &= -f^2 + p m_{0,0} \\ \Sigma\eta_k^4 &= -f^3 + fp + p m_{0,0}^{(1)} \\ \Sigma\eta_k^5 &= -f^4 + 2fp m_{0,0} + p m_{0,0}^{(2)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (V)$$

Med tillhjälp af (V) kunna vi nu beräkna koefficienterna $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ i ekvationen (3). Vi begagna oss härvid af Newtons formelsystem*:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= s_1 + a_1 \\ 0 &= s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 \\ 0 &= s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 \\ 0 &= s_4 + a_1 s_3 + a_2 s_2 + a_3 s_1 + 4a_4 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots \quad (VI)$$

där

$$s_\nu = \eta_0^\nu + \eta_1^\nu + \eta_2^\nu + \cdots + \eta_{e-1}^\nu ,$$

* Se t. ex. Weber I, § 46.

och få då

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(f+1) - \frac{p}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2.3}(f+1)(2f+1) - \frac{1}{3}pm_{0,0} - \frac{1}{2}p$$

$$a_4 = \frac{1}{2.3.4}(f+1)(2f+1)(3f+1) - p\left(\frac{1}{3}m_{0,0} + \frac{1}{4}m^{(1)}_{0,0}\right) -$$

$$- \frac{1}{4}p(2f+1) + \frac{1}{8}p^2$$

$$a_5 = \frac{1}{2.3.4.5}(f+1)(2f+1)(3f+1)(4f+1) -$$

$$- \frac{1}{12}p(2f^2+6f+1) - \frac{17}{30}fpm_{0,0} - p\left(\frac{1}{6}m_{0,0} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}m^{(1)}_{0,0} + \frac{1}{5}m^{(2)}_{0,0}\right) + \frac{1}{6}p^2m_{0,0} + \frac{1}{8}p^2$$

o. s. v.

2) f **är udda.**

Ur (8) få vi

$$\left.\begin{aligned}
\eta_{i0}^2 &= m_{0,0}\eta_{i0} + m_{1,0}\eta_{i1} + \cdots + m_{e-1,0}\eta_{ie-1}\\
\eta_{i0}\eta_{i1} &= m_{0,1}\eta_{i0} + m_{1,1}\eta_{i1} + \cdots + m_{e-1,1}\eta_{ie-1}\\
\eta_{i0}\eta_{i2} &= m_{0,2}\eta_{i0} + m_{1,2}\eta_{i1} + \cdots + m_{e-1,2}\eta_{ie-1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\eta_{i0}\eta_{i\frac{1}{2}e} &= f + m_{0,\frac{1}{2}e}\eta_{i0} + m_{1,\frac{1}{2}e}\eta_{i1} + \cdots + m_{e-1,\frac{1}{2}e}\eta_{ie-1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\eta_{i0}\eta_{ie-1} &= m_{0,e-1}\eta_{i0} + m_{1,e-1}\eta_{i1} + \cdots + m_{e-1,e-1}\eta_{ie-1}
\end{aligned}\right\} \text{(VII)}$$

Genom att gå till väga på samma sätt som i föregående fall få vi efter hvartannat

$$\eta_0^3 = m_{0,0}\eta_0^2 + m_{1,0}\eta_0\eta_1 + \cdots + m_{e-1,0}\eta_0\eta_{e-1} =$$
$$= fm_{\frac{1}{2}e,0} + m^{(1)}_{0,0}\eta_0 + m^{(1)}_{1,0}\eta_1 + \cdots + m^{(1)}_{e-1,0}\eta_{e-1} \quad . \quad . \quad (19)$$

$$\eta_0^4 = fm_{\frac{1}{2}e,0}\eta_0 + m^{(1)}_{0,0}\eta_0^2 + m^{(1)}_{1,0}\eta_0\eta_1 + \cdots + m^{(1)}_{e-1,0}\eta_0\eta_{e-1} =$$
$$= fm^{(1)}_{\frac{1}{2}e,0} + fm_{\frac{1}{2}e,0}\eta_0 + m^{(2)}_{0,0}\eta_0 + m^{(2)}_{1,0}\eta_1 + \cdots + m^{(2)}_{e-1,0}\eta_{e-1} \quad (20)$$

$$\eta_0^5 = fm^{(1)}_{\frac{1}{2}e,0}\eta_0 + fm_{\frac{1}{2}e,0}\eta_0^2 + m^{(2)}_{0,0}\eta_0^2 + m^{(2)}_{1,0}\eta_0\eta_1 + \cdots +$$
$$+ m^{(2)}_{e-1,0}\eta_0\eta_{e-1} =$$
$$= fm^{(2)}_{\frac{1}{2}e,0} + fm^{(1)}_{\frac{1}{2}e,0}\eta_0 + fm_{\frac{1}{2}e,0}\eta_0^2 +$$
$$+ m^{(3)}_{0,0}\eta_0 + m^{(3)}_{1,0}\eta_1 + \cdots + m^{(3)}_{e-1,0}\eta_{e-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

o. s. v.

Genom cyklisk substitution få vi

$$\eta_1^2 = m_{0,0}\eta_1 + m_{1,0}\eta_2 + \cdots + m_{e-1,0}\eta_0$$
$$\eta_2^2 = m_{0,0}\eta_2 + m_{1,0}\eta_3 + \cdots + m_{e-1,0}\eta_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\eta_1^3 = fm_{\frac{1}{2}e,0} + m^{(1)}_{0,0}\eta_1 + m^{(1)}_{1,0}\eta_2 + \cdots + m^{(1)}_{e-1,0}\eta_0$$
$$\eta_2^3 = fm_{\frac{1}{2}e,0} + m^{(1)}_{0,0}\eta_2 + m^{(1)}_{1,0}\eta_3 + \cdots + m^{(1)}_{e-1,0}\eta_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

o. s. v.

Häraf

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma\eta_k &= -1 \\
\Sigma\eta_k^2 &= -\Sigma m_{k,0} \\
\Sigma\eta_k^3 &= efm_{\frac{1}{2}e,0} - \Sigma m^{(1)}_{k,0} \\
\Sigma\eta_k^4 &= efm^{(1)}_{\frac{1}{2}e,0} - fm_{\frac{1}{2}e,0} - \Sigma m^{(2)}_{k,0} \\
\Sigma\eta_k^5 &= efm^{(2)}_{\frac{1}{2}e,0} - fm^{(1)}_{\frac{1}{2}e,0} + fm_{\frac{1}{2}e,0}\Sigma\eta_k^2 - \Sigma m^{(3)}_{k,0} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (\text{VIII})$$

Äfven här skall naturligtvis k vid summeringen genomlöpa ett fullständigt restsystem, mod. e.

Vi få vidare

$$\Sigma m_{k,0} = f$$
$$\Sigma m_{k,0}^{(1)} = f^2 - m_{\frac{1}{2}e,0}$$
$$\Sigma m_{k,0}^{(2)} = f^3 - f m_{\frac{1}{2}e,0} - m_{\frac{1}{2}e,0}^{(1)}$$
$$\Sigma m_{k,0}^{(3)} = f^4 - f^2 m_{\frac{1}{2}e,0} - f m_{\frac{1}{2}e,0}^{(1)} - m_{\frac{1}{2}e,0}^{(2)}$$

o. s. v.

Genom insättning af dessa värden i (VIII) blir

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma \eta_k &= -1 \\
\Sigma \eta_k^2 &= -f \\
\Sigma \eta_k^3 &= -f^2 + p m_{\frac{1}{2}e,0} \\
\Sigma \eta_k^4 &= -f^3 + p m_{\frac{1}{2}e,0}^{(1)} \\
\Sigma \eta_k^5 &= -f^4 + p m_{\frac{1}{2}e,0}^{(2)} \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad \text{(IX)}$$

Vi använda åter formelsystemet (VI), så blir

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = \frac{1}{2}(f+1)$$
$$a_3 = \frac{1}{2.3}(f+1)(2f+1) - \frac{1}{3} p m_{\frac{1}{2}e,0}$$
$$a_4 = \frac{1}{2.3.4}(f+1)(2f+1)(3f+1) - p\left(\frac{1}{3} m_{\frac{1}{2}e,0} + \frac{1}{4} m_{\frac{1}{2}e,0}^{(1)}\right)$$
$$a_5 = \frac{1}{2.3.4.5}(f+1)(2f+1)(3f+1)(4f+1) -$$
$$- p\left[\frac{1}{6}(f+1) m_{\frac{1}{2}e,0} + \frac{1}{4} m_{\frac{1}{2}e,0}^{(1)} + \frac{1}{5} m_{\frac{1}{2}e,0}^{(2)}\right]$$

o. s. v.

Ekvationen (3), som vi kunna skrifva

$$(\eta - \eta_0)(\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2) \ldots (\eta - \eta_{e-1}) = 0\,, \qquad (3\,a)$$

kan framställas äfven i form af en determinant.

Om vi först antaga, att f är jämn, och vi utbyta den första ekvationen i (II) mot ekvationen (13) samt ordna de så erhållna ekvationerna på ett lämpligt sätt, få vi följande system med e ekvationer:

$$\left(1 + \frac{1}{\eta_0}\right)\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_{e-1} = 0$$

$$m_{0,1}\eta_0 + (m_{1,1} - \eta_0)\eta_1 + m_{2,1}\eta_2 + \cdots + m_{e-1,1}\eta_{e-1} = 0$$

$$m_{0,2}\eta_0 + m_{1,2}\eta_1 + (m_{2,2} - \eta_0)\eta_2 + \cdots + m_{e-1,2}\eta_{e-1} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_{0,e-1}\eta_0 + m_{1,e-1}\eta_1 + m_{2,e-1}\eta_2 + \cdots + (m_{e-1,e-1} - \eta_0)\eta_{e-1} = 0$$

Eftersom η_0, η_1, η_2, $\ldots$ η_{e-1} ej kunna vara lika med noll, så måste detta systems determinant vara lika med noll, d. v. s.

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{\eta_0}, & 1, & 1, & \ldots 1 \\ m_{0,1}, & m_{1,1} - \eta_0, & m_{2,1}, & \ldots m_{e-1,1} \\ m_{0,2}, & m_{1,2}, & m_{2,2} - \eta_0, & \ldots m_{e-1,2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_{0,e-1}, & m_{1,e-1}, & m_{2,e-1}, & \ldots m_{e-1,e-1} - \eta_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (22)$$

Om däremot f är udda, så begagna vi oss af ekvationerna i (VII), dock så att vi där utbyta $(\frac{1}{2}e + 1)^{\text{sta}}$ ekvationen mot ekvationen (13) och få då systemet:

$$\left(1 + \frac{1}{\eta_0}\right)\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_{e-1} = 0$$

$$(m_{0,0} - \eta_0)\eta_0 + m_{1,0}\eta_1 + m_{2,0}\eta_2 + \cdots + m_{e-1,0}\eta_{e-1} = 0$$

$$m_{0,1}\eta_0 + (m_{1,1} - \eta_0)\eta_1 + m_{2,1}\eta_2 + \cdots + m_{e-1,1}\eta_{e-1} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_{0,e-1}\eta_0 + m_{1,e-1}\eta_1 + m_{2,e-1}\eta_2 + \cdots + (m_{e-1,e-1} - \eta_0)\eta_{e-1} = 0$$

Detta systems determinant blir också lika med noll, hvaraf vi få

$$\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{\eta_0}, & 1, & 1, & \dots\ 1 \\ m_{0,0}-\eta_0, & m_{1,0}, & m_{2,0}, & \dots\ m_{e-1,0} \\ m_{0,1}, & m_{1,1}-\eta_0, & m_{2,1}, & \dots\ m_{e-1,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{0,e-1}, & m_{1,e-1}, & m_{2,e-1}, & \dots\ m_{e-1,e-1}-\eta_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (23)$$

— — —

§ 2. Fördelning af rötterna i två perioder.

Vi skola nu närmare undersöka det fall, då

$$p = 2f + 1,$$

d. v. s. $e = 2$ och $f = \frac{p-1}{2}$.

Om vi beteckna perioderna med η_0 och η_1, så blir

$$\eta_0 = r + r^{g^2} + r^{g^4} + \dots + r^{g^{p-3}},$$

$$\eta_1 = r^g + r^{g^3} + r^{g^5} + \dots + r^{g^{p-2}},$$

där g liksom i det föregående betecknar en primitiv rot till primtalet p.

1) f är jämn.

Om vi begagna oss af formlerna*

$$m_{h,k} = m_{h-k,e-k} \quad \dots \quad (1)$$

och

$$m_{h,k} = m_{k,h}, \text{ om } f \text{ är jämn} \quad \dots \quad (2)$$

* Kummer, Über die Zerlegung ... etc. § 1, (5) o. (6).

samt för enkelhetens skull sätta

$$m_{0,0} = \alpha \text{ och } m_{1,0} = \beta,$$

så få vi enligt § 1

$$\eta_0^2 = f + \alpha\eta_0 + \beta\eta_1,$$

$$\eta_0\eta_1 = \beta\eta_0 + \beta\eta_1.$$

För bestämning af värdena på α och β ha vi från (II) och (14) i § 1 relationerna

$$f = 2\beta, \quad f = 1 + \alpha + \beta.$$

hvaraf

$$\alpha = \frac{p-5}{4}, \quad \beta = \frac{p-1}{4} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Periodekvationen (3) i § 1 blir här

$$\eta^2 + a_1\eta + a_2 = 0,$$

samt efter insättning af värdena på a_1 och a_2

$$\eta_i^2 + \eta_i - \frac{1}{4}(p-1) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Rötterna till denna ekvation äro

$$\eta_{i0} = \frac{-1+\sqrt{p}}{2}, \quad \eta_{i1} = \frac{-1-\sqrt{p}}{2}.$$

2) f är udda.

Här ha vi*

$$m_{k+\frac{1}{2}e,k} = m_{k+\frac{1}{2}e,k}, \quad \text{om } f \text{ är udda} \quad . \quad (5)$$

Enligt § 1 samt § 2 (1) och (5) få vi

$$\eta_0^2 = \alpha\eta_0 + \beta\eta_1,$$

$$\eta_0\eta_1 = f + \alpha\eta_{i0} + \alpha\eta_{i1}.$$

* Kummer, Über die Zerlegung ... etc. § 1, (6).

Vidare få vi enligt (VII) och (14) i § 1

$$f = 1 + 2\alpha,\ f = \alpha + \beta,$$

hvaraf

$$\alpha = \frac{p-3}{4},\ \beta = \frac{p+1}{4} \quad \ldots\ldots\ (6)$$

Periodekvationen blir

$$\eta_i^2 + \eta_i + \frac{1}{4}(p+1) = 0, \quad \ldots\ldots\ (7)$$

hvaraf

$$\eta_0 = \frac{-1+\sqrt{-p}}{2},\ \eta_1 = \frac{-1-\sqrt{-p}}{2}.$$

I tabell I meddelas värdena på α och β samt periodekvationen för de värden på p under 100, hos hvilka en fördelning af rötterna i två perioder kan komma i fråga.

Af hithörande värden på p finnas några, som äro af särskildt intresse, nämligen de för hvilka cirkeln kan delas i p lika stora delar genom upprepad tvådelning af perioderna. För dylika p-värden kan som bekant konstruktionen utföras med tillhjälp af endast linjal och passare. Ifrågavarande p-värden äro

$$5,\ 17,\ 257,\ 65537,\ \ldots$$

d. v. s. *primtal* af formen

$$2^{2^h}+1,$$

där $h = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Af dessa tillhör fallet $p = 5$ eller konstruktionen af en regulier 5-hörning den rent elementära matematiken. Teorien för den reguliera 17-hörningen kungjordes första gången 1796 af Gauss i Allgem. Litteraturzeitung*. Sedan dess har reguli-

* Uppgiften är hämtad från Baumgarts afhandling "Ueber das quadratische Reciprocitätsgesetz" i Schlömilch, Zeitschrift für Mathem. und Physik Band 30.

era 17-hörningen flera gånger blifvit behandlad i den matematiska litteraturen. Här må nämnas:

Erchinger, Geometrische Construction des regelmässigen Siebenzehnecks i Göttingische gelehrte Anzeigen. December 1825 *.

Staudt, Construction des regulären Siebenzehnecks i Crelles Journal Band 24.

Schröter, Zur v. Staudtschen Construction des regulären Siebenzehnecks i Crelles Journal Band 75.

Schröter, Construction du polygone de 17 côtés i Nouvelles annales de mathem. Tome 33.

Caley, On the equation $x^{17} - 1 = 0$ i The Messenger of Mathematics (2) Vol. 19.

Den reguliera 257-hörningen finnes mycket utförligt behandlad af Richelot, De resolutione algebraica aequationis $x^{257} = 1$, sive de divisione circuli per bisectionem anguli septies repetitam in partes 257 inter se aequales commentatio coronata i Crelles Journal Band 9.

257-hörningen är vidare behandlad af Affolter, Zur Staudt-Schröter'schen Construction des regulären Vielecks i Clebsch und Neumann, Mathem. Annalen Band 6 samt af Pascal, Sulla construzione del poligone regolare di 257 lati i Rendiconte dell Accad. delle scienze fisiche e mathem. di Napoli (2) I.

Slutligen finnes reguliera 65537-hörningen behandlad af Hermes, Über die Teilung des Kreises in 65537 gleiche Teile i Nachrichten von der Kgl. Gesellsch. der Wissenschaften zu Göttingen. Jahrg. 1894.

* Se Carl Friedrich Gauss' Werke Band II sid. 186.

§ 3. Fördelning af rötterna i tre perioder.

Vi öfvergå nu till en närmare undersökning af det fall, då

$$p = 3f + 1,$$

d. v. s. $e = 3$ och $f = \frac{1}{3}(p-1)$. Tydligt är, att f här alltid måste vara ett jämnt tal.

Om η_0, η_1, η_2 äro de tre perioderna, så blir

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= r + r^{g^3} + r^{g^6} + \cdots + r^{g^{3f-3}},\\
\eta_1 &= r^g + r^{g^4} + r^{g^7} + \cdots + r^{g^{3f-2}},\\
\eta_2 &= r^{g^2} + r^{g^5} + r^{g^8} + \cdots + r^{g^{3f-1}},
\end{aligned}$$

eller

$$\eta_0 = \sum_{h=0}^{h=f-1} r^{g^{3h}};\quad \eta_1 = \sum_{h=0}^{h=f-1} r^{g^{3h+1}};\quad \eta_2 = \sum_{h=0}^{h=f-1} r^{g^{3h+2}}.$$

Om vi begagna oss af (1) och (2) i § 2 samt införa

$$m_{0,0} = \alpha,\quad m_{1,0} = \beta,\quad m_{2,0} = \gamma,\quad m_{2,1} = \delta,$$

få vi enligt § 1

$$\left.\begin{aligned}
\eta_0^2 &= f + \alpha\eta_0 + \beta\eta_1 + \gamma\eta_2\\
\eta_1^2 &= f + \gamma\eta_0 + \alpha\eta_1 + \beta\eta_2\\
\eta_2^2 &= f + \beta\eta_0 + \gamma\eta_1 + \alpha\eta_2
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{I})$$

samt

$$\left.\begin{aligned}
\eta_0\eta_1 &= \beta\eta_0 + \gamma\eta_1 + \delta\eta_2\\
\eta_1\eta_2 &= \delta\eta_0 + \beta\eta_1 + \gamma\eta_2\\
\eta_2\eta_0 &= \gamma\eta_0 + \delta\eta_1 + \beta\eta_2
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{II})$$

Vi skola nu härleda periodekvationen samt sedan bestämma värdena på α, β, γ, δ.

Enligt (14) i § 1 få vi

$$\alpha + \beta + \gamma = f - 1, \quad \beta + \gamma + \delta = f, \quad \ldots \quad (1)$$

hvaraf

$$\alpha = \delta - 1 \quad \ldots \quad (2)$$

Om vi begagna oss af ofvanstående ekvationssystem (I) och (II), få vi

$$\eta_0\eta_1\eta_2 = \delta\eta_0^2 + \beta\eta_0\eta_1 + \gamma\eta_0\eta_2 =$$
$$= \delta f + (\alpha\delta + \beta^2 + \gamma^2)\eta_0 + (\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta)\eta_1 +$$
$$+ (\beta\delta + \gamma\delta + \beta\gamma)\eta_2.$$

Men då $\eta_0\eta_1\eta_2$ är en hel symmetrisk funktion af perioderna η_0, η_1, η_2, så måste denna produkt vara lika med ett helt tal, hvaraf följer, att koefficienterna för η_0, η_1, η_2 i sistnämnda ekvation äro lika stora*, d. v. s.

$$\alpha\delta + \beta^2 + \gamma^2 = \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta,$$

eller enligt (2) i denna §

$$\delta^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta = \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta \quad \ldots \quad (3)$$

Om vi använda determinanten (22) i § 1, få vi

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{\eta_0}, & 1 & , & 1 \\ \beta & , & \gamma - \eta_0, & \delta \\ \gamma & , & \delta & , \beta - \eta_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Genom utveckling af determinanten få vi ekvationen

$$\eta_0^3 + \eta_0^2 - \eta_0(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - \beta\gamma - \beta\delta - \gamma\delta + \beta + \gamma) + \beta\gamma - \delta^2 = 0,$$

eller med begagnande af (3)

$$\eta_0^3 + \eta_0^2 - \eta_0(\beta + \gamma + \delta) + \beta\gamma - \delta^2 = 0,$$

eller

$$\eta_0^3 + \eta_0^2 - f\eta_0 + \beta\gamma - \delta^2 = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

* Jämför GAUSS, Untersuchungen . . . etc., Art. 358.

För koefficientbestämningen begagna vi oss af Jacobis funktion *

$$F(\alpha) = x + \alpha x^g + \alpha^2 x^{g^2} + \cdots + \alpha^{p-2} x^{g^{p-2}},$$

där α är en primitiv rot till ekvationen $\alpha^{p-1} - 1 = 0$. Om vi sätta α^f i stället för α eller låta $\alpha^f = \beta$ vara en primitiv rot till ekvationen $\beta^e - 1 = 0$, så öfvergår Jacobis funktion till **

$$F(\beta) = \eta_0 + \beta\eta_1 + \beta^2\eta_2 + \cdots + \beta^{e-1}\eta_{e-1} \quad . \quad . \quad (5)$$

I föreliggande fall blir

$$F(u) = \eta_0 + u\eta_1 + u^2\eta_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

där u är en primitiv rot till $u^3 - 1 = 0$. Lätt får man

$$F(u^2) = \eta_0 + u^2\eta_1 + u^4\eta_2 = \eta_0 + u^2\eta_1 + u\eta_2 \quad . \quad . \quad (7)$$

och

$$\begin{aligned} F(u)^2 *** &= \eta_0^2 + u^2\eta_1^2 + u\eta_2^2 + 2(u\eta_0\eta_1 + u^2\eta_0\eta_2 + \eta_1\eta_2) = \\ &= \alpha(\eta_0 + u^2\eta_1 + u\eta_2) + \beta(\eta_1 + u^2\eta_2 + u\eta_0) + \\ &+ \gamma(\eta_2 + u^2\eta_0 + u\eta_1) + 2[\beta(u\eta_0 + u^2\eta_2 + \eta_1) + \\ &+ \gamma(u\eta_1 + u^2\eta_0 + \eta_2) + \delta(u\eta_2 + u^2\eta_1 + \eta_0)] = \\ &= \alpha F(u^2) + \beta u F(u^2) + \gamma u^2 F(u^2) + \\ &+ 2[\beta u F(u^2) + \gamma u^2 F(u^2) + \delta F(u^2)] = \\ &= F(u^2)(\alpha + \beta u + \gamma u^2 + 2\delta + 2\beta u + 2\gamma u^2) = \\ &= F(u^2)(\alpha + 2\delta + 3\beta u - 3\gamma u - 3\gamma). \end{aligned}$$

Genom division och insättning af $u = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ få vi

* Se C. G. J. Jacobi, Über die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie (Crelles Journal Band 30).

** α och β här få naturligtvis icke förväxlas med α och β definierade å sidan 21.

*** $F(u)^2$ betyder $F(u) \, . \, F(u)$.

$$\frac{F(u)^2}{F(u^2)} = \frac{1}{2}[2\alpha + 4\delta - 3\beta - 3\gamma + 3(\beta - \gamma)iV3] =$$

$$= \frac{1}{2}(9\delta - p - 1) + \frac{3}{2}(\beta - \gamma)iV3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Genom en enkel räkning kan man lätt öfvertyga sig om, att uttrycken

$$\frac{F(u)^2}{F(u^2)} \text{ och } \frac{F(u^{-1})^2}{F(u^{-2})}$$

äro konjugatexpressioner.

Vi skola nu visa, att de också hafva egenskapen

$$\frac{F(u) \cdot F(u)}{F(u^2)} \cdot \frac{F(u^{-1}) \cdot F(u^{-1})}{F(u^{-2})} = p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

För att visa detta är det tillräckligt att bevisa

$$F(u^m) \cdot F(u^{-m}) = p, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

där m är ett helt tal, som icke är delbart med e. Vi utföra här beviset endast för det fall, att $e = 3$. Formlerna (9) och (10) kunna tydligen generaliseras.

Vi hafva

$$F(u^m) = \eta_0 + u^m\eta_1 + u^{2m}\eta_2,$$
$$F(u^{-m}) = \eta_0 + u^{-m}\eta_1 + u^{-2m}\eta_2,$$

och

$$F(u^m) \cdot F(u^{-m}) = \eta_0^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + u^m\eta_0\eta_1 + u^{-m}\eta_1\eta_2 +$$
$$+ u^{2m}\eta_2\eta_0 + u^{-2m}\eta_0\eta_2 + u^m\eta_0\eta_1 + u^{-m}\eta_1\eta_2 =$$
$$= \eta_0^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + (u^m + u^{-m})\eta_0\eta_1 +$$
$$+ (u^m + u^{-m})\eta_1\eta_2 + (u^{2m} + u^{-2m})\eta_0\eta_2 =$$
$$= 3f - \alpha - \beta - \gamma + (u^m + u^{-m})(\eta_0\eta_1 + \eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_0) =$$
$$= 2f + 1 - f(u^m + u^{-m}) =$$
$$= 3f + 1 = p.$$

Af (8) och (9) få vi således

$$p = \frac{1}{4}(9\delta - p - 1)^2 + \frac{27}{4}(\beta - \gamma)^2, \quad \ldots \quad (11)$$

eller

$$4p = A^2 + 27B^2 *, \quad \ldots \quad (12)$$

där

$$A^2 = (9\delta - p - 1)^2 \quad \ldots \quad (13)$$

och

$$B^2 = (\beta - \gamma)^2 \quad \ldots \quad (14)$$

Eftersom talet $4p$ alltid och blott på *ett* sätt kan sönderdelas i en kvadrat och 27-falden af en kvadrat **, så kan man för hvarje p bestämma motsvarande värden på A^2 och B^2.

För beräkning af värdena på α, β, γ, δ få vi således ekvationerna

$$\left.\begin{aligned} 9\delta - p - 1 &= \pm A \\ \alpha &= \delta - 1 \\ \beta - \gamma &= \pm B \\ \beta + \gamma + \delta &= \frac{p-1}{3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (III)$$

Angående valet af tecken framför A, så behöfver man blott iakttaga, att man skall använda $+A$, om A är af formen $3z + 1$, men $-A$, om A är af formen $3z + 2$ ***.

Hvad åter valet af tecken framför B beträffar, så är det beroende af hvilken primitiv rot g man väljer. För några primitiva rötter är $\beta - \gamma$ positiv, för andra negativ.

* Denna ekvation är ett uttryck för den ur talteorien kända satsen: Om p är ett primtal af formen $3f + 1$, kan $4p$ alltid skrifvas som summan af *en kvadrat* och *27-falden af en kvadrat*.

** Bevis härför finnes hos Gauss, Untersuchungen ... etc., Art. 358.

*** Man kan nämligen skrifva $9\delta - p - 1 = 3(3\delta - f) - 2$, och eftersom $3\delta - f$ alltid måste vara ett helt tal, så får man ofvannämnda regel. Tydligt är, att A ej kan vara af formen $3z$, ty då skulle $4p$ vara delbart med 3.

Ur systemet (III) få vi

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{A+p-8}{9} \\ \beta &= \frac{9B-A+2p-4}{18} \\ \gamma &= \frac{2p-9B-A-4}{18} \\ \delta &= \frac{A+p+1}{9} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (IV)$$

β och γ byta värden, om man ändrar tecknet för B*.

Genom insättning i (4) få vi ekvationen

$$\eta_0^3 + \eta_0^2 - \frac{1}{3}(p-1)\eta_0 - \frac{1}{27}(Ap+3p-1) = 0 \quad . \quad (15)$$

Genom substitutionen $3\eta_0 + 1 = x$ öfvergår (15) till

$$x^3 - 3px - pA = 0 \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

I stället för att begagna oss af determinanten (22) i § 1 kunna vi använda ekvationen (3) i § 1, hvilken här blir

$$\eta^3 + a_1\eta^2 + a_2\eta + a_3 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

I föreliggande fall blir

$$a_1 = 1\,,$$

$$a_2 = -\frac{1}{3}(p-1)\,,$$

$$a_3 = -\frac{1}{27}(Ap+3p-1)\,.$$

Genom insättning af dessa värden i (17) få vi ekvationen

$$\eta^3 + \eta^2 - \frac{1}{3}(p-1)\eta - \frac{1}{27}(Ap+3p-1) = 0\,.$$

* En annan metod för att bestämma värdena på α, β, γ, δ finnes angifven af Gauss, Untersuchungen ... etc., Art. 358. Se äfven Bachmann, Fünfzehnte Vorlesung.

Denna ekvation har de tre perioderna till rötter och öfverensstämmer med ekvationen (15).

I tabell II äro värdena på A, B, α, β, γ, δ, a_2, a_3 angifna för de p-värden under 200, hos hvilka en fördelning af rötterna i *tre* perioder kan komma i fråga.

Af de i tabell II upptagna värdena på p är det några, som äro af särskildt intresse, nämligen

$$p = 7,\ 13,\ 19,\ 37,\ 73,\ 97,\ \ldots .$$

emedan reguliera månghörningar med ifrågavarande antal sidor, s. k. tredje-grads månghörningar, kunna konstrueras med tillhjälp af vinkelns tredelning. Af dessa är det några få, som finnas behandlade i den matematiska litteraturen.

Gauss har i Art. 353 af Disqvisitiones arithmeticae exempelvis behandlat den algebraiska lösningen af cirkeldelningsekvationen för reguliera 19-hörningen. Sedermera (1873) har Affolter* med tillhjälp af vinkelns tredelning utfört den geometriska konstruktionen för reguliera 7-hörningen och reguliera 13-hörningen samt hänvisat till samma förfaringssätt för konstruktion af reguliera 19- och 37-hörningarna. I flera handböcker t. ex. Bachmann, Die Lehre von der Kreistheilung och Weber, Lehrbuch der Algebra finnes den algebraiska lösningen af ekvationen $\frac{x^{13}-1}{x-1} = 0$ framställd som exempel på Gauss' teori för cirkeldelningen.

Vi skola i följande paragraf redogöra för lösningen af ekvationen för reguliera *37-hörningen*** enligt den i det föregående framställda metoden.

* G. Affolter, Construction des regulären Sieben- und Dreizehn-Ecks (Clebsch und Neumann, Math. Annalen Band 6).

** Såvidt jag har mig bekant, finnes ej reguliera 37-hörningen förut behandlad i den matematiska litteraturen.

§ 4. Lösning af ekvationen $x^{37} - 1 = 0$.

Lösningen af ekvationen $x^{37} - 1 = 0$ reduceras till lösningen af ekvationen

$$x^{36} + x^{35} + x^{34} + \cdots + x^2 + x + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Om vi välja $g = 2$ som primitiv rot till primtalet 37, så få vi lätt följande schema

$$\left.\begin{array}{llllllll} 2^0 \equiv & 1, & 2^3 \equiv & 8, & 2^6 & -10, & 2^9 \equiv & -6, \\ 2^1 \equiv & 2, & 2^4 \equiv & 16, & 2^7 & 17, & 2^{10} \equiv & -12, \\ 2^2 \equiv & 4, & 2^5 \equiv & -5, & 2^8 & -3, & 2^{11} & 13, \end{array}\right\} \text{mod. } 37$$

$$\left.\begin{array}{llllllll} 2^{12} \equiv & -11, & 2^{15} & -14, & 2^{18} & -1, & 2^{21} \equiv & -8, \\ 2^{13} \equiv & 15, & 2^{16} \equiv & 9, & 2^{19} & -2, & 2^{22} \equiv & -16, \\ 2^{14} & -7, & 2^{17} & 18, & 2^{20} & -4, & 2^{23} & 5, \end{array}\right\} \text{mod. } 37$$

$$\left.\begin{array}{llllllll} 2^{24} \equiv & 10, & 2^{27} \equiv & 6, & 2^{30} & 11, & 2^{33} & 14, \\ 2^{25} & -17, & 2^{28} & 12, & 2^{31} & -15, & 2^{34} \equiv & -9, \\ 2^{26} \equiv & 3, & 2^{29} & -13, & 2^{32} & 7, & 2^{35} \equiv & -18, \end{array}\right\} \text{mod. } 37$$

Om r är en rot till ekvationen (1), så kunna enligt § 1 samtliga rötter till nämnda ekvation framställas genom

$$r,\ r^g,\ r^{g^2},\ \ldots\ r^{g^{34}},\ r^{g^{35}},$$

hvilka med ledning af ofvanstående schema kunna utbytas mot

$$r,\ r^2,\ r^4,\ \ldots\ r^{14},\ r^{-9},\ r^{-18}.$$

Om dessa ordnas i tre perioder, få vi

$$\left.\begin{aligned}
\eta_0 &= r + r^{8} + r^{10} + r^{6} + r^{11} + r^{14} + r^{1} + r^{8} + \\
&\quad + r^{10} + r^{6} + r^{11} + r^{14} \\
\eta_1 &= r^{2} + r^{16} + r^{17} + r^{-12} + r^{15} + r^{9} + r^{-2} + r^{-16} + \\
&\quad + r^{17} + r^{12} + r^{15} + r^{9} \\
\eta_2 &= r^{4} + r^{-5} + r^{-3} + r^{13} + r^{-7} + r^{18} + r^{-4} + r^{5} + \\
&\quad + r^{3} + r^{-13} + r^{7} + r^{-18}
\end{aligned}\right\} . \quad (I)$$

Ur tabell II få vi i detta fall ($p = 37$) följande värden på α, β, γ, δ

$$\alpha = 2, \quad \beta = 5, \quad \gamma = 4, \quad \delta = 3,$$

hvaraf

$$\begin{aligned}
\eta_0^{2} &= 12 + 2\eta_0 + 5\eta_1 + 4\eta_2, \\
\eta_0\eta_1 &= 5\eta_0 + 4\eta_1 + 3\eta_2, \\
\eta_1\eta_2 &= 3\eta_0 + 5\eta_1 + 4\eta_2, \\
\eta_2\eta_0 &= 4\eta_0 + 3\eta_1 + 5\eta_2.
\end{aligned}$$

Om vi för att pröfva riktigheten af den i det föregående framställda teorien utföra multiplikationerna med de i (I) framställda värdena på η_0, η_1, η_2, komma vi till samma resultat. Vi finna då äfven, att om man använder den primitiva roten 2 till primtalet 37, så blir $\beta = 5$ och $\gamma = 4$, ej tvärtom *.

Determinanten (22) i § 1 blir här

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{\eta_0}, & 1, & 1 \\ 5, & 4 - \eta_0, & 3 \\ 4, & 3, & 5 - \eta_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Genom utveckling af denna determinant få vi ekvationen

$$\eta_0^{3} + \eta_0^{2} - 12\eta_0 + 11 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

* Jämför sidan 25.

Som man lätt kan öfvertyga sig om, så öfverensstämmer ekvationen (2) med den ekvation, som man får, om man insätter de ur tabell II tagna värdena på a_2 och a_3 i ekvationen (17) i § 3.

Denna ekvations diskriminant är lika med $1369 = 37^2$; alltså har ekvationen (2) tre reella rötter. Eftersom sista termen är positiv och näst sista termen är negativ, så har ekvationen två positiva rötter och en negativ rot *.

För att lösa ekvationen (2) sätta vi

$$\eta_0 = t - \frac{1}{3}$$

och få då ekvationen

$$t^3 - \frac{37}{3}t + \frac{407}{27} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Denna ekvations rötter äro **

$$t_1 = 2{,}52043; \quad t_2 = 1{,}49095; \quad t_3 = -4{,}01138.$$

Härur få vi rötterna till ekvationen (2)

$$\eta_{10} = 2{,}18710; \quad \eta_{11} = 1{,}15761; \quad \eta_{12} = -4{,}34471.$$

Om vi sedan i öfverensstämmelse med Gauss' metod *** indela potenserna i hvar och en af de ursprungliga perioderna (I) i två nya perioder, få vi

$$\left.\begin{aligned} \eta_0' &= r + r^{-10} + r^{-11} + r^{-1} + r^{10} + r^{11} \\ \eta_0'' &= r^8 + r^{-6} + r^{-14} + r^{-8} + r^6 + r^{14} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (\text{II a})$$

$$\left.\begin{aligned} \eta_1' &= r^2 + r^{17} + r^{15} + r^{-2} + r^{-17} + r^{-15} \\ \eta_1'' &= r^{16} + r^{-12} + r^9 + r^{-16} + r^{12} + r^{-9} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (\text{II b})$$

$$\left.\begin{aligned} \eta_2' &= r^4 + r^{-3} + r^{-7} + r^{-4} + r^3 + r^7 \\ \eta_2'' &= r^{-5} + r^{13} + r^{18} + r^5 + r^{-13} + r^{-18} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (\text{II c})$$

* Se t. ex. Weber I, § 83.

** Jämför Gauss, Untersuchungen . . . etc., Art. 346 och 352.

*** Gauss, Untersuchungen . . . etc., Art. 352.

η_0' och η_0'' satisfiera ekvationen

$$x^2 - (\eta_0' + \eta_0'')x + \eta_0'\eta_0'' = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

hvilken kan skrifvas

$$x^2 - \eta_0 x + \eta_1 + 2\eta_2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

eller efter insättning af värdena på η_0, η_1, η_2

$$x^2 - 2{,}18710\,x - 7{,}53181 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Löses denna ekvation, få vi

$$\eta_0' = 4.04781\,; \quad \eta_0'' = -1{,}86071\,.$$

På motsvarande sätt få vi

$$\eta_1' = 0{,}02606\,; \quad \eta_1'' = 1{,}13155\,.$$

Om vi sedan indela hvar och en af perioderna i grupperna (II) i tre nya perioder, få vi

$$\left.\begin{aligned} \zeta_0' &= r + r^{-1} \\ \zeta_0'' &= r^{-10} + r^{10} \\ \zeta_0''' &= r^{-11} + r^{11} \end{aligned}\right\} \text{(III' a)} \qquad \left.\begin{aligned} \tau_0' &= r^8 + r^{-8} \\ \tau_0'' &= r^{-6} + r^6 \\ \tau_0''' &= r^{-14} + r^{14} \end{aligned}\right\} \text{(III'' a)}$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1' &= r^2 + r^{-2} \\ \zeta_1'' &= r^{17} + r^{-17} \\ \zeta_1''' &= r^{15} + r^{-15} \end{aligned}\right\} \text{(III' b)} \qquad \left.\begin{aligned} \tau_1' &= r^{16} + r^{-16} \\ \tau_1'' &= r^{-12} + r^{12} \\ \tau_1''' &= r^9 + r^{-9} \end{aligned}\right\} \text{(III'' b)}$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta_2' &= r^4 + r^{-4} \\ \zeta_2'' &= r^{-3} + r^3 \\ \zeta_2''' &= r^{-7} + r^7 \end{aligned}\right\} \text{(III' c)} \qquad \left.\begin{aligned} \tau_2' &= r^{-5} + r^5 \\ \tau_2'' &= r^{13} + r^{-13} \\ \tau_2''' &= r^{18} + r^{-18} \end{aligned}\right\} \text{(III'' c)}$$

ζ_0', ζ_0'', ζ_0''' satisfiera ekvationen

$$y^3 - (\zeta_0' + \zeta_0'' + \zeta_0''')y^2 + (\zeta_0'\zeta_0'' + \zeta_0''\zeta_0''' + \zeta_0'''\zeta_0')y - \\ - \zeta_0'\zeta_0''\zeta_0''' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Denna ekvation kan tydligen skrifvas

$$y^3 - \eta_0' y^2 + (\eta_1'' + \eta_0')y - (2 + \eta_1') = 0 \quad . \quad . \quad (8)$$

Efter insättning af värdena på η_0', η_1'', η_1' öfvergår ekvationen (8) till

$$y^3 - 4{,}04781\, y^2 + 5{,}17936\, y - 2{,}02606 = 0, \quad . \quad . \quad (9)$$

ur hvilken vi få

$$\zeta_0' = 0{,}73153.$$

Slutligen få vi värdet på r ur ekvationen

$$z^2 - \zeta_0' z + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$r = 0{,}36577 \pm 0{,}93071\, i,$$

hvarefter de öfriga rötterna till (1) kunna erhållas genom dignitetsupphöjning.

Tabell I.

p	f	α	β	$\eta^2 + a_1\eta + a_2 = 0$
5	2	0	1	$\eta^2 + \eta - 1 = 0$
13	6	2	3	$\eta^2 + \eta - 3 = 0$
17	8	3	4	$\eta^2 + \eta - 4 = 0$
29	14	6	7	$\eta^2 + \eta - 7 = 0$
37	18	8	9	$\eta^2 + \eta - 9 = 0$
41	20	9	10	$\eta^2 + \eta - 10 = 0$
53	26	12	13	$\eta^2 + \eta - 13 = 0$
61	30	14	15	$\eta^2 + \eta - 15 = 0$
73	36	17	18	$\eta^2 + \eta - 18 = 0$
89	44	21	22	$\eta^2 + \eta - 22 = 0$
97	48	23	24	$\eta^2 + \eta - 24 = 0$
7	3	1	2	$\eta^2 + \eta + 2 = 0$
11	5	2	3	$\eta^2 + \eta + 3 = 0$
19	9	4	5	$\eta^2 + \eta + 5 = 0$
23	11	5	6	$\eta^2 + \eta + 6 = 0$
31	15	7	8	$\eta^2 + \eta + 8 = 0$
43	21	10	11	$\eta^2 + \eta + 11 = 0$
47	23	11	12	$\eta^2 + \eta + 12 = 0$
59	29	14	15	$\eta^2 + \eta + 15 = 0$
67	33	16	17	$\eta^2 + \eta + 17 = 0$
71	35	17	18	$\eta^2 + \eta + 18 = 0$
79	39	19	20	$\eta^2 + \eta + 20 = 0$
83	41	20	21	$\eta^2 + \eta + 21 = 0$
p	f	α	β	$\eta^2 + a_1\eta + a_2 = 0$

Tabell II.

p	A	B	α	$\frac{\beta}{\gamma}$	$\frac{\gamma}{\beta}$	δ	a_2	a_3	p
7	+ 1	1	0	1	0	1	— 2	— 1	7
13	— 5	1	0	2	1	1	— 4	+ 1	13
19	+ 7	1	2	2	1	3	— 6	— 7	19
31	+ 4	2	3	3	1	4	— 10	— 8	31
37	— 11	1	2	5	4	3	— 12	+ 11	37
43	— 8	2	3	6	4	4	— 14	+ 8	43
61	+ 1	3	6	8	5	7	— 20	— 9	61
67	— 5	3	6	9	6	7	— 22	+ 5	67
73	+ 7	3	8	9	6	9	— 24	— 27	73
79	— 17	1	6	10	9	7	— 26	+ 41	79
97	+ 19	1	12	10	9	13	— 32	— 79	97
103	+ 13	3	12	12	9	13	— 34	— 61	103
109	— 2	4	11	14	10	12	— 36	— 4	109
127	— 20	2	11	16	14	12	— 42	+ 80	127
139	— 23	1	12	17	16	13	— 46	+ 103	139
151	+ 19	3	18	17	14	19	— 50	— 123	151
157	— 14	4	15	20	16	16	— 52	+ 64	157
163	+ 25	1	20	17	16	21	— 54	— 169	163
181	+ 7	5	20	22	17	21	— 60	— 67	181
193	— 23	3	18	24	21	19	— 64	+ 143	193
199	— 11	5	20	25	20	21	— 66	+ 59	199
p	A	B	α	$\frac{\beta}{\gamma}$	$\frac{\gamma}{\beta}$	δ	a_2	a_3	p